LINEARE ALGEBRA

ÜBUNGSBLATT 5

Man betrachtet immer einen Körper K.

1. Man zeige, dass die Menge $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ aller $m\times n$-Matrizen eine Vektorraumstruktur trägt, bezüglich die Addition der Matrizen und die Multiplikation der Matrizen mit Skalaren aus K definiert als:

$$K\times \mathcal{M}_{m\times n}(K)\to \mathcal{M}_{m\times n}(K),\ \text{wobei } \alpha\,(a_{ij})=(\alpha a_{ij})\,.$$

2. Ist V ein K-Vektorraum, $\alpha,\beta\in K$ und $x,y\in V$, so gelten:
   a) Wenn $\alpha x=0$, dann $\alpha=0$ oder $x=0$.
   b) Wenn $\alpha x=\alpha y$ und $\alpha\neq 0$, dann $x=y$.
   a) Wenn $\alpha x=\beta x$ und $x\neq 0$, dann $\alpha=\beta$.

3. Man zeige, dass die abelsche Gruppe $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist bezüglich die Skalarmultiplikation:

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*,\ \text{wobei } \alpha * x = x^\alpha.$$

4. Welche aus der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$, auch $\mathbb{R}$-Untervektorräume sind:

$$\begin{aligned}
&A=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_3=0\};\\
&B=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1=0 \text{ oder } x_2=0\};\\
&C=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3=0\};\\
&D=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3=1\};\\
&E=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1=x_2=x_3\}?
\end{aligned}$$

5. Man betrachte einen K-Vektorraum V und einen nicht trivialen Unterraum $S\le V$ (d.h. $S\neq V$ und $S\neq 0$). Ist $V\setminus S$ ein Unterraum? Aber $(V\setminus S)\cup\{0\}$?

6. a) Man betrachte K-Vektorraum V, und zwei Unterräume $S,U\le V$.Man zeige, dass $S\cup U\le V$ g.d.w. $S\subseteq U$ oder $U\subseteq S$.
b) Man zeige, dass die Vereinigung zweier Unterräume ist nicht unbedingt ein Unterraum.

7. a) Man betrachte einen nicht nullen K-Vektorraum V, und $0\neq x\in V$. Man zeige, dass die Abbildung $f:K\to V$, $f(\alpha)=\alpha x$ injektiv ist.
b) Existiert eine $\mathbb{Q}$-Vektorraumstruktur definiert auf der abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}_n,+)$?

8. a) Man betrachte einen $\mathbb{Z}_p$-Vektorraum V, wobei p eine Primzahl ist. Man zeige, dass $px=0$, wobei $px:=x+x+\ldots+x(p\text{ mal})$, für jesdes $x\in V$.

b) Existiert eine $\mathbb{Z}_p$-Vektorraumstruktur definiert auf der abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$?

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`